CORRECTION DS N°2

Exercice 1:

On pose $z = x + iy$ et on obtient:

Z= $(1+z)(i+\bar{z}) = (1+x+iy)(i+x-iy) = (x^2+x+y^2-y)+i(1+x-y)$

1) Z est réel $\Leftrightarrow$ Im (Z) = 0 $\Leftrightarrow 1+x-y=0 \Leftrightarrow$ M point de la droite d'équation $y = x+1$.
2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Re (Z) = 0 $\Leftrightarrow x^2+x+y^2-y=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ M point du cercle de centre I $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2:

a. $v_n = 4u_n - 8n + 24 \Rightarrow v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4\left(\frac{1}{2}u_n + n - 1\right) - 8(n+1) - 1 = 2u_n + 4n - 4 - 8n - 8 + 24 = 2u_n - 4n + 12 = \frac{1}{2}(4u_n - 8n + 24) = \frac{1}{2}v_n$.

On a donc démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

La raison étant inférieure à 1, cette suite est décroissante. De plus $v_0 = 4u_0 + 24 = 28$.

b. On a immédiatement $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 28 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4u_n - 8n + 24 \iff$

$4u_n = 28\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8n - 24 \Leftrightarrow u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

De plus: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 6 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c. On a donc $u_n = \underbrace{7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{suite géométrique}} + \underbrace{-2n+6}_{\text{suite arithmétique}} = x_n + y_n$ où (x_n) est la suite (v_n) au facteur 4 près et la suite (y_n) est définie par $y_n = -2n + 6$, suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 6.

d. On en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n}(x_k + y_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k + \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$.

Or $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k = \dfrac{7 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 14\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 14 - 7 \times \left(\frac{1}{2}^n\right)$.

D'autre part $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k = -6(n+1) + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) =$
$-6n - 6 + n(n+1) = -6n - 6 + n^2 + n = n^2 - 5n - 6$.

Finalement $\boxed{S_n = n^2 - 5n + 8 - 7\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$

Exercice 2 :

1) Attention : P_n est la propriété : « $u_n > 0$ ET $v_n > 0$ » les deux inégalités étant indiscociables l'une de l'autre, car on a besoin des 2 comme hypothèse de récurrence.

Considérons un rang $k \geq 0$ tel que : « $u_k > 0$ et $v_k > 0$ »
Montrons que : « $u_{k+1} > 0$ et $v_{k+1} > 0$ »
Par hypothèse de récurrence, $u_k\, v_k > 0$ et $u_k + v_k > 0$ donc $u_{k+1} = \dfrac{2u_k v_k}{u_k + v_k} > 0$ et $v_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2} > 0$.

Or $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$, donc la propriété est vraie au rang 0.
Donc par récurrence $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier n.

2) a) simple calcul, avec identité remarquable à repérer...
b) Attention : ici ce n'est pas une récurrence. La réalisation du rang n ne dépend en rien de celle du rang précédant, ceci grâce au carré.

En effet : $v_n - u_n = \dfrac{(v_{n-1} - u_{n-1})^2 \{ \textit{positif car carré}}{2(u_{n-1} + v_{n-1}) \{ \textit{positif d'aprés 1)}}$

donc $v_n - u_n \geq 0$ pour tout entier n.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n) \ \{ \textit{positif d'aprés ci-dessus}}{u_n + v_n \ \{ \textit{positif d'aprés 1)}}$$

donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n, donc (u_n) croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leq 0$ pour tout entier n donc (v_n) décroissante.

3) On sait (u_n) croissante donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier n, i.e $u_{n+1} \geq u_n$ i.e $-u_{n+1} \leq -u_n$,
i.e $v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n$.

a) Or $v_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$ donc cqfd.

b) Supposons qu'il existe un entier k tel que : $v_k - u_k \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

Montrons que : $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2^k}$.

On sait $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2}(v_k - u_k)$ d'aprés a) et par hypothèse de récurrence $v_k - u_k \leq \dfrac{1}{2^{k-1}}$

Donc $v_{k+1} - u_{k+1} \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^{k-1}}$ cqfd.

Or $v_0 - u_0 = 2 \leq \dfrac{1}{2^{-1}}$.

Donc par récurrence $v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ pour tout entier n.

4) On a donc $0 \leq v_n - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.
De plus (u_n) croissante et (v_n) décroissante, donc ces 2 suites sont adjacentes.
On en déduit que ces suites sont convergentes ET ont la même limite qu'on note l.

5) $t_{n+1} = u_{n+1}v_{n+1} = ... = u_n v_n = t_n$ POUR TOUT ENTIER n donc la suite (t_n) est constante
et $t_n = t_0 = 15$ pour tout entier n.

6) Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 15$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \times l = 15$ d'où $l = \pm\sqrt{15}$ OR ces deux suites sont à termes positifs donc $l = \sqrt{15}$

Exercice 4 :

1) a) $z_1 = \lambda z_0 + i = i$ $\quad z_2 = \lambda z_1 + i = \lambda i + i = (\lambda+1)i$ $\quad z_3 = \lambda z_2 + i = \lambda(\lambda+1)i + i = (\lambda^2+\lambda+1)i$

b) Considérons un rang $k \geq 0$ tel que $z_k = \dfrac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1}i$. Montrons que $z_{k+1} = \dfrac{\lambda^{k+1}-1}{\lambda-1}i$.

On a : $z_{k+1} = \lambda z_k + i$

$= \lambda \times \dfrac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1}i + i$ d'après l'HR

$= \dfrac{(\lambda^{k+1} - \lambda) + (\lambda - 1)}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^{k+1} - 1}{\lambda - 1}i$

Or la propriété est vraie au rang 0 car $\dfrac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1}i = 0 = z_0$, donc elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

2) a) $z_4 = \dfrac{i^4 - 1}{i - 1}i = \dfrac{(i^2)^2 - 1}{i - 1}i = \dfrac{1-1}{i-1}i = 0$.

b) $z_{n+4} = \dfrac{i^{n+4} - 1}{i - 1}i = \dfrac{i^n \times i^4 - 1}{i - 1}i = \dfrac{i^n - 1}{i - 1}i = z_n$ pour tout $n \geq 0$.

3) a) $z_{n+k} = \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i = z_n$ pour tout $n \geq 0$.

b) $z_{n+k} = z_n \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1}i = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}i \Leftrightarrow \lambda^{n+k} = \lambda^n \Leftrightarrow \lambda^n(\lambda^k - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \ ou \ \lambda^k - 1 = 0$.

Or $\lambda \neq 0$ donc $\lambda^k = 1$.