

Exercice 1 : *Obtenir l'écriture décimale d'un nombre rationnel*

1. 1ère étape : poser la division euclidienne de 54 par 17 et donner son écriture en ligne :
 $54 = \dots \times 17 + \dots$
2. 2ème étape :
Recommencer avec le reste. Quelle nouvelle égalité peut-on écrire ?
En déduire l'égalité : $54 = 3 \times 17 + 0, 1 \times 17 + 1, 3$.
3. 3ème étape :
Démontrer de même que l'on obtient l'égalité : $54 = 3 \times 17 + 0, 1 \times 17 + 0, 07 \times 17 + 0, 11$.
4. Quels sont les premiers chiffres obtenus de l'écriture décimale de $\frac{54}{17}$?
5. Résumé des trois premières étapes :
 $54 = \boxed{3} \times 17 + 3$, reste 3
 $30 = \boxed{1} \times 17 + 13$, reste 13
 $130 = \boxed{7} \times 17 + 11$, reste 11
Donner un algorithme en langage naturel qui permet de trouver les chiffres successifs de l'écriture décimale d'un quotient de deux nombres entiers donnés.

Exercice 2 : *périodicité*

1. Combien de restes différents peut-on au plus avoir lorsqu'on effectue la division euclidienne de 54 par 17 ? Au bout d'au plus combien de calculs obtiendra-t-on un reste déjà trouvé ?
2. Quelle conséquence cela aura-t-il sur la partie décimale de l'écriture du nombre $\frac{54}{17}$?
3. Énoncer un théorème sur l'écriture décimale (éventuellement illimitée) d'un nombre rationnel.

Exercice 3 : *points de suspension...*

1. Le nombre $\frac{2}{3}$ est-il un nombre décimal ? Pourquoi ?
2. Effectuer à la main la division de 2 par 3. Que remarque-t-on ?
On est tenté d'écrire $\frac{2}{3} = 0,6666\dots$. Mais quel est le sens de cette écriture ? C'est ce que l'on va tenter de découvrir dans la suite de cet exercice.
3. Montrer que $0,666\dots = 6 \times (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots)$.
4. On admet que $(10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots)$ signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n})$.
Démontrer alors en utilisant des théorèmes sur les suites que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \times (10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n}) = \frac{2}{3}.$$

Remarque : nous venons de donner un sens aux points de suspension dans l'écriture $0,666\dots$

Elements de correction

Algorithmes :

```
1  VARIABLES
2    a EST_DU_TYPE NOMBRE //numérateur
3    b EST_DU_TYPE NOMBRE //dénominateur
4    n EST_DU_TYPE NOMBRE //nombre de chiffres
5    r EST_DU_TYPE NOMBRE
6    q EST_DU_TYPE NOMBRE
7    i EST_DU_TYPE NOMBRE //compteur pour boucle
8  DEBUT_ALGORITHME
9    LIRE a
10   LIRE b
11   LIRE n
12   POUR i ALLANT_DE 0 A n
13     DEBUT_POUR
14       r PREND_LA_VALEUR a%b //reste dans la division euclidienne de a par b
15       q PREND_LA_VALEUR floor(a/b)
16       AFFICHER q
17       a PREND_LA_VALEUR 10*r
18     FIN_POUR
19  FIN_ALGORITHME
```

Avec partie entière et virgule :

```
1  VARIABLES
2    a EST_DU_TYPE NOMBRE
3    b EST_DU_TYPE NOMBRE
4    n EST_DU_TYPE NOMBRE
5    r EST_DU_TYPE NOMBRE
6    q EST_DU_TYPE NOMBRE
7    i EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9    LIRE a
10   LIRE b
11   LIRE n
12   //partie entière
13   r PREND_LA_VALEUR a%b
14   q PREND_LA_VALEUR floor(a/b)
15   AFFICHER q
16   AFFICHER ","
17   a PREND_LA_VALEUR 10*r
18   //partie décimale
19   POUR i ALLANT_DE 0 A n
20     DEBUT_POUR
21       r PREND_LA_VALEUR a%b
22       q PREND_LA_VALEUR floor(a/b)
23       AFFICHER q
24       a PREND_LA_VALEUR 10*r
25     FIN_POUR
26  FIN_ALGORITHME
```