Éléments de correction

Exercice 1 :

1. (a) $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF})=-\dfrac{\pi}{3}$ (triangle équilatéral)

   (b) D'après la relation de Chasles sur les angles :
   $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FH})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FH})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FH})$.

   (c) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{FD},\overrightarrow{FH})=\dfrac{\pi}{2}$ (carrés)
   $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{FD})=(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF})=-\dfrac{\pi}{3}$
   Donc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FH})=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$.

2. (a) $(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HK})=(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HG})+(\overrightarrow{HG},\overrightarrow{HI})+(\overrightarrow{HI},\overrightarrow{HK})=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4\pi}{3}$
   donc la mesure principale de $(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HK})$ est $\dfrac{4\pi}{3}-2\pi=\dfrac{-2\pi}{3}$.

   (b) $(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{HK})=\pi+(\overrightarrow{HF},\overrightarrow{HK})=\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$.

3. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HK})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{FH})+(\overrightarrow{FH},\overrightarrow{HK})=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\pi$
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont donc colinéaires et de sens opposés. De plus, comme $AB=HK$ (côtés de carrés et de triangles équilatéraux), alors ces vecteurs sont opposés, donc $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{HK}$.

4. $(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DH})=(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DF})+(\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DH})=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{5\pi}{6}$.

Exercice 2 :

(a) $2\left(\cos x\right)^2-3\cos x-2=0$
On pose $X=\cos x$. L'équation devient : $2X^2-3X-2=0$.
$\Delta=9+16=25>0$ donc le trinôme a deux racines distinctes : $X_1=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $X_2=\dfrac{3+5}{4}=2$.
On résout alors dans $[0;2\pi]$ les deux équations : $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ et $\cos x=2$.
Les solutions de la première sont : $x=\dfrac{2\pi}{3}$ et $x=\dfrac{4\pi}{3}$ et la deuxième n'a pas de solution (car $2>1$).
Les solutions dans $[0;2\pi]$ sont donc $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{4\pi}{3}$.

(b) $\sin(3x)=\sin\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)\iff$
$3x=-x+\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $3x=\pi-\left(-x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$.
$4x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $3x=\pi+x-\dfrac{\pi}{4}+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$.
$4x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $2x=\dfrac{3\pi}{4}+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$.
$x=\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\dfrac{3\pi}{8}+k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$.
Les solutions dans $[0;2\pi]$ sont donc $\dfrac{\pi}{16}$, $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9\pi}{16}$, $\dfrac{\pi}{16}+2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{17\pi}{16}$, $\dfrac{\pi}{16}+3\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{25\pi}{16}$, $\dfrac{3\pi}{8}$ et $\dfrac{3\pi}{8}+\pi=\dfrac{11\pi}{8}$.

(c) $\sqrt{3}-2\cos x\geqslant 0\iff\dfrac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\cos x\iff x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$

(d) $\cos(2x)=\sin(3x)\iff\cos(2x)=\cos(\dfrac{\pi}{2}-3x)\iff$
$2x=\dfrac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ou $2x=-\dfrac{\pi}{2}+3x+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}\iff$
$5x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=-\dfrac{\pi}{2}+2k'\pi\iff$
$x=\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{2\pi}{5}$ ou $x=\dfrac{\pi}{2}-2k'\pi$. Les solutions dans $[0;2\pi]$ sont donc : $\dfrac{\pi}{10};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{9\pi}{10};\dfrac{13\pi}{10};\dfrac{17\pi}{10}$.

Exercice 3 :

(a) $\cos(\pi-x)=\cos(\pi+x)$ VRAIE

(b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos(-x)$ VRAIE

(c) FAUX : $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos(x)$

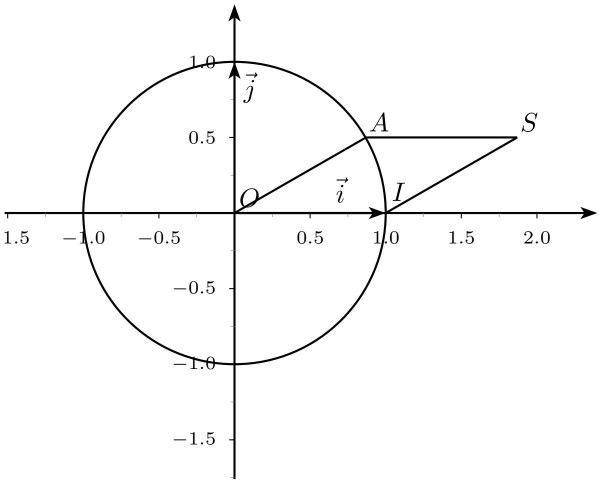
(d) FAUX : $\cos(\pi+x)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

(e) FAUX : $\sin\dfrac{2\pi}{3}+\tan\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

(f) FAUX : $\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\dfrac{7\pi}{3}=-1$.

Exercice 4 :

1.



2.

3. Comme $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{OI}$ alors $OASI$ est un parallélogramme. Comme de plus $OA = OI$ (même rayon polaire), alors $OASI$ est un losange.

4. La diagonale (OS) est donc la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$. donc $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OS}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

5. $A\left(1 \times \cos\dfrac{\pi}{6}; 1 \times \sin\dfrac{\pi}{6}\right) \qquad A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

6. $OS = \sqrt{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{3})^2+1}{4}} = \dfrac{\sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1}}{2} = \dfrac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{4(2+\sqrt{3})}}{2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$

   $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} = OS \times \cos\dfrac{\pi}{12}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{OS} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

   De même, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{OS} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$