CORRECTION DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES (1)

Développement - Factorisation.

1. $A(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$;
$B(x) = -x^3 - 6x^2 + 32$;
$C(x) = -9x^3 + 18x^2 - 11x + 2$;
$D(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$.

2. $A(x) = 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{4}x$;
$B(x) = -3x^2 - 6x + \frac{7}{3}$;
$C(x) = -5x^3 + 26x^2 - 39x + 10$.

3. 1° $A(x) = x(4x - 9)$; $B(x) = (3 + x)(3 - x)$;
$C(x) = x(1 + x)(1 - x)$.
2° a) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$; b) $(x + 1)(x - 3)$;
c) $(4 + x)(2 - x)$.
3° a) $(x - 3)(x - 4)$; b) $(2x - 1)(x - 2)$.

4. a) $(1 + x)(1 - x)$; b) $(2x + 1)(2x - 1)$;
c) ne se factorise pas : somme de positifs ;
d) $(x + 4)(-x - 3)$; e) $(2x - 1)(2x - 3)$;
f) $(4x - 1)(1 - x)$;
g) ne se factorise pas : somme de négatifs.

5. a) $-3(x + 1)$; b) $(x + 1)(x - 3)$;
c) $\left(\frac{x+5}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right)$; d) $(3x - 2)(-3x - 4)$;
e) ne se factorise pas ; f) $(3x - 1)(-3x + 5)$.

6. 1° $f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(-1) = 6$; $f(2) = 3$.
2° $f(0) = -4$; $f(1) = 0$; $f(-1) = -10$; $f(4) = 0$.
3° $f(0) = \frac{1}{3}$; $f(1) = -\frac{2}{3}$; $f(-1) = \frac{2}{3}$;
$f(3) = -\frac{14}{3}$.

7 1° Valeur interdite : -1. $f(0) = -1$;
$f(1) = \frac{1}{2}$; $f(3) = \frac{5}{4}$; $f(-3) = \frac{7}{2}$.
2° Valeur interdite : 0. $f(-1) = \frac{3}{2}$;
$f(1) = -\frac{3}{2}$; $f(2) = 0$; $f(-2) = 0$; $f(5) = \frac{21}{10}$.

---

8. 1° Valeurs interdites : -1 et 0.
$f(1) = -\frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{1}{6}$; $f(-2) = \frac{5}{2}$.
2° Valeur interdite : 2.
$f(0) = 0$; $f(-1) = \frac{2}{3}$; $f(1) = 0$; $f(3) = -6$.

9. $A(x) = 0$ pour $\frac{1}{2}$ et 7.
$B(x) = 0$ pour -3 et -1.
$C(x) = 0$ pour 0, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.
$D(x) = 0$ pour 0, $\frac{1}{6}$ et $\frac{4}{3}$.

10. a) 0 et 3 ; b) -1 et 1 ; c) -3 et 3 ;
d) $-\frac{9}{4}$ et 0 ; e) 0 et $\frac{5}{4}$.

11. -1 et 2 annulent $A(x)$.
Aucune valeur n'annule $B(x)$.
0 et 2 annulent $C(x)$.
-2 et 3 annulent $D(x)$.
1 et 2 annulent $E(x)$.

12. -1, 0 et 1 annulent $A(x)$.
0 annule $B(x)$. 0 et 3 annulent $C(x)$.
1 et 3 annulent $D(x)$. -1 et 3 annulent $E(x)$.

Équations

22. a) $(2x - 1)(4x - 6)$; $S = \left\{\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$.
b) $(3x + 1)(-7x - 15)$;
$S = \left\{-\frac{1}{3} ; -\frac{15}{7}\right\}$.
c) $(3x + 2)(x + 4)$; $S = \left\{-4 ; -\frac{2}{3}\right\}$.

25. 1° $S = \left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$;
$S = \varnothing$; $S = \{-3 ; 3\}$.
2° $S = \left\{-\frac{1}{5} ; \frac{1}{5}\right\}$; $S = \left\{0 ; \frac{4}{9}\right\}$; $S = \varnothing$.

29. 1° a) (V.I. = 1), $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$;
b) (V.I. = -2), $S = \{0 ; 2\}$.
2° a) (V.I. = 8), $S = \{-2\}$;
b) (V.I. = $\frac{1}{2}$), $S = \left\{\frac{1}{3} ; 1\right\}$;
3° a) (V.I. = -1), $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$;
b) (V.I. = $\frac{3}{2}$), $S = \{5\}$.
c) (V.I. = 0), $S = \{-3 ; 3\}$.

32. 1° a) (V.I. : -1 et 1) : $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;
b) (V.I. : 1) : $S = \{0\}$.
2° a) (V.I. : 1 et 2) : $S = \varnothing$.
b) (V.I. : -3 et 0) : $S = \varnothing$.

Calcul algébrique

6. a) $2x^2 - 7x + 6$; b) $35x^2 + 8x - 3$;
c) $x^3 - 2x^2 + 4x - 3$; d) $-18x^2 + 51x + 9$;
e) $-108x^2 + 39x + 35$; f) $2x^3 - 5x^2 + 6x - 8$.

7. a) $9x^2 - 18x - 2$; b) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{2}x - \frac{1}{2}$;
c) $\frac{29}{25}x^2 + 7x + \frac{15}{4}$; d) $\frac{1}{6}x^2 + 4x - 1$.

8. $A(x) = 4x^2 + 21x - 2$; $B(x) = 3x - 3$;
$C(x) = -3x^2 - 14x - 4$; $D(x) = 4x^2 - 6x - 9$.

9. $A(x) = 13x^2 - 29x + 3$; $B(x) = -8x + 3$;
$C(x) = 8x^2 - 18x - 4$; $D(x) = -12x^2 - 15x + 4$.

10. a) Il faut développer le premier et le troisième, pour retrouver le deuxième.
b) Il faut réduire au même dénominateur le deuxième pour retrouver le troisième ; appliquer la règle des signes pour le premier.
c) Comme le a).

11. Méthode identique au précédent.

---

19. a)
$$f(-2) = \frac{5(-2) - 3}{-2 - 6} = \frac{-13}{-8} = \frac{13}{8}.$$
b)
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{5}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 6} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{17}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{17}{3}}$$
$$= \frac{4}{3} \times \left(\frac{3}{17}\right) = \frac{4}{17}.$$
c) 6 n'a pas d'image par f, car 6 n'appartient pas à l'ensemble de définition de f.

d) $f(\sqrt{3}) = \frac{5\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3} - 6}$. On va rendre rationnel (sans radical du dénominateur) en multipliant le numérateur et le dénominateur par $(\sqrt{3} + 6)$:
$$f(\sqrt{3}) = \frac{(5\sqrt{3} - 3)(\sqrt{3} + 6)}{(\sqrt{3} - 6)(\sqrt{3} + 6)}$$
$$= \frac{15 + 30\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 18}{3 - 36}$$
$$= \frac{-3 + 27\sqrt{3}}{-33} = \frac{1 - 9\sqrt{3}}{11}.$$

e) $4 + \sqrt{2}$ n'a pas d'image par f, car $4 + \sqrt{2} > 5$, $4 + \sqrt{2}$ n'appartient pas à l'ensemble de définition de f.

21. 1° $f(0) = (0 - 1)(0 + 1) = -1$;
$f(3) = (2 \times 3 - 1)(3 + 1) = 5 \times 4 = 20$.
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3} - 1\right)\left(-\frac{2}{3} + 1\right)$$
$$= -\frac{7}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{7}{9}.$$
$$f(\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)$$
$$= 2 \times 3 + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = 5 + \sqrt{3}.$$
$$f(1 - \sqrt{2}) = (2(1 - \sqrt{2}) - 1)(1 - \sqrt{2} + 1)$$
$$= (1 - 2\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$$
$$= 2 - \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 = 6 - 5\sqrt{2}.$$

2° b) On développe :
$$f(x) = (2x - 1)(x + 1) = 2x^2 + 2x - x - 1 = 2x^2 + x - 1.$$
On développe :
$$(2x + 5)(x - 2) + 9 = 2x^2 - 4x + 5x - 10 + 9 = 2x^2 + x - 1.$$
On en déduit que :
$f(x) = (2x + 5)(x - 2) + 9$.

b) $f\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(2 \times \frac{-5}{2} + 5\right)\left(\frac{-5}{2} - 2\right) + 9$
$= 0 + 9 = 9$.
$f(2) = (2 \times 2 + 5)(2 - 2) + 9 = 0 + 9 = 9$.
$-\frac{5}{2}$ et 2 sont des antécédents de 9 par f ; mais on ne sait pas si ce sont les seuls. Pour le prouver, il faudrait résoudre l'équation $f(x) = 9$.

Equations et inéquations
1. Sur un graphique

60. a) $S = \{-1{,}6 ; 0 ; 2{,}5\}$;
b) $S = \{-2 ; 0{,}5 ; 1{,}5\}$; c) $S = \{-1{,}8 ; 0{,}2 ; 2\}$;
d) $S = \{-1{,}4 ; -0{,}2 ; 4\}$.