CORRECTION DS N°5

EXERCICE 1:

Partie A

1. Pour tout point M de l'espace, on a :
$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}\right) + \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IA}$

or I est le milieu du segment [AD], donc $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$,
et par conséquent, $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{O} - IA^2 = MI^2 - IA^2$

2. Pour tout point M de l'espace, on a :
$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0 \iff MI^2 = IA^2 \iff MI = IA$ car MI et IA sont des réels positifs.
L'ensemble (E) cherché est donc la sphère de centre I passant par A.

Partie B

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\,(-3;6;0)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -3\times 4 + 6\times 2 + 0\times 0 = 0$
$\overrightarrow{AC}\,(-3;0;4)$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = -3\times 4 + 0\times 0 + 4\times 3 = 0$
donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC),
on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) a une équation de la forme : $4x + 2y + 3z + d = 0$.
Le point A(3;0;0) appartient au plan (ABC), donc $4\times 3 + d = 0 \iff d = -12$.
(ABC) : $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

2. **a.** La droite Δ est orthogonale au plan (ABC), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de Δ. On sait également que D$(-5;0;1)$ est un point de Δ.

On en déduit une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. Le point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), est le point d'intersection de D et du plan (ABC).
On résout :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ -20 + 16t + 4t + 3 + 9t - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ t = \dfrac{29}{29} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases}$$ On obtient ainsi H$(-1;2;4)$.

c. H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), donc la distance du point D au plan (ABC) est égale à la distance DH$= \sqrt{(-1+5)^2 + 2^2 + (4-1)^2} = \sqrt{29}$.

d. Les points H et D appartiennent à la droite Δ.
Le vecteur $\overrightarrow{HD}$ est donc orthogonal au plan (ABC).
De plus, les points H et D appartiennent au plan (ABC), donc le vecteur $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{HA}$,
ainsi $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA} = 0$, donc H appartient à l'ensemble (E).

Partie C:

1. **a.** On vérifie que la somme des pondérations est non nulle.

   b. G barycentre de $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$ équivaut, par associativité, à G barycentre de $\{(O,3),(I,3)\}$ car I isobarycentre de A, B, C. Donc G$\in (OI)$

(où G barycentre… équivaut à $3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ puis on introduit le point I isobarycentre de A, B, C…)

2. $\left\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 5 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \frac{5}{6} \Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre G et de rayon $\frac{5}{6}$.

EXERCICE 2:

1. Les deux vecteurs normaux sont colinéaires, donc **A.**
2. Le système admet une unique solution donc **D.**
3. Les deux vecteurs normaux sont orthogonaux (produit scalaire) donc **A.**
4. Le système admet un couple solution t = 0 et s = - 1 donc **C.**
5. Seules les coordonnées de D vérifient les équations donc **D.**