CORRECTION DS N°6

EXERCICE 1:

1) $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) $z_1=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\times 8=4e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_2=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\times 4e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad z_3=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}=e^{i\frac{3\pi}{3}}=e^{i\pi}=-1$

3) a) $$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n-z_n}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}z_n}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}-1}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}-4}{4}}{\frac{1+i\sqrt{3}}{4}}=\frac{i\sqrt{3}-3}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(i\sqrt{3}-3)(1-i\sqrt{3})}{4}=i\sqrt{3}$$

b) On en déduit $(\overrightarrow{M_{n+1}O};\overrightarrow{M_{n+1}M_n})=\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ donc triangle rectangle.

EXERCICE 2 :

1. Un exemple.

a. Voir figure.

b. Le point K' a pour affixe $z_{K'}=\frac{-(1+i)^2}{1+i-i}=-2i$.

c. Voir figure.

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas.

a. L' a pour affixe $z_{L'}=\frac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{\frac{i}{2}-i}=\frac{-\left(\frac{i}{2}\right)^2}{-\frac{i}{2}}=\frac{i}{2}$. On remarque ainsi que $L'=L$.

b. Soit M un point du plan complexe d'affixe $z\neq i$. Alors :

$$\big(f(M)=M\big)\iff\left(z=\frac{-z^2}{z-i}\right)\iff\left(z(z-i)=-z^2\right)\iff\left(z(2z-i)=0\right)\iff\left(z=0\ \text{ou}\ z=\frac{i}{2}\right).$$

Il n'y a donc que deux points invariants par f : O et L.

3. Un procédé de construction.

a. On a : $g=\frac{i+z+z'}{3}=\frac{i+z-\frac{z^2}{z-i}}{3}=\frac{(z-i)(z+i)-z^2}{3(z-i)}=\frac{z^2+1-z^2}{3(z-i)}=\frac{1}{3(z-i)}$.
L'égalité est vérifiée.

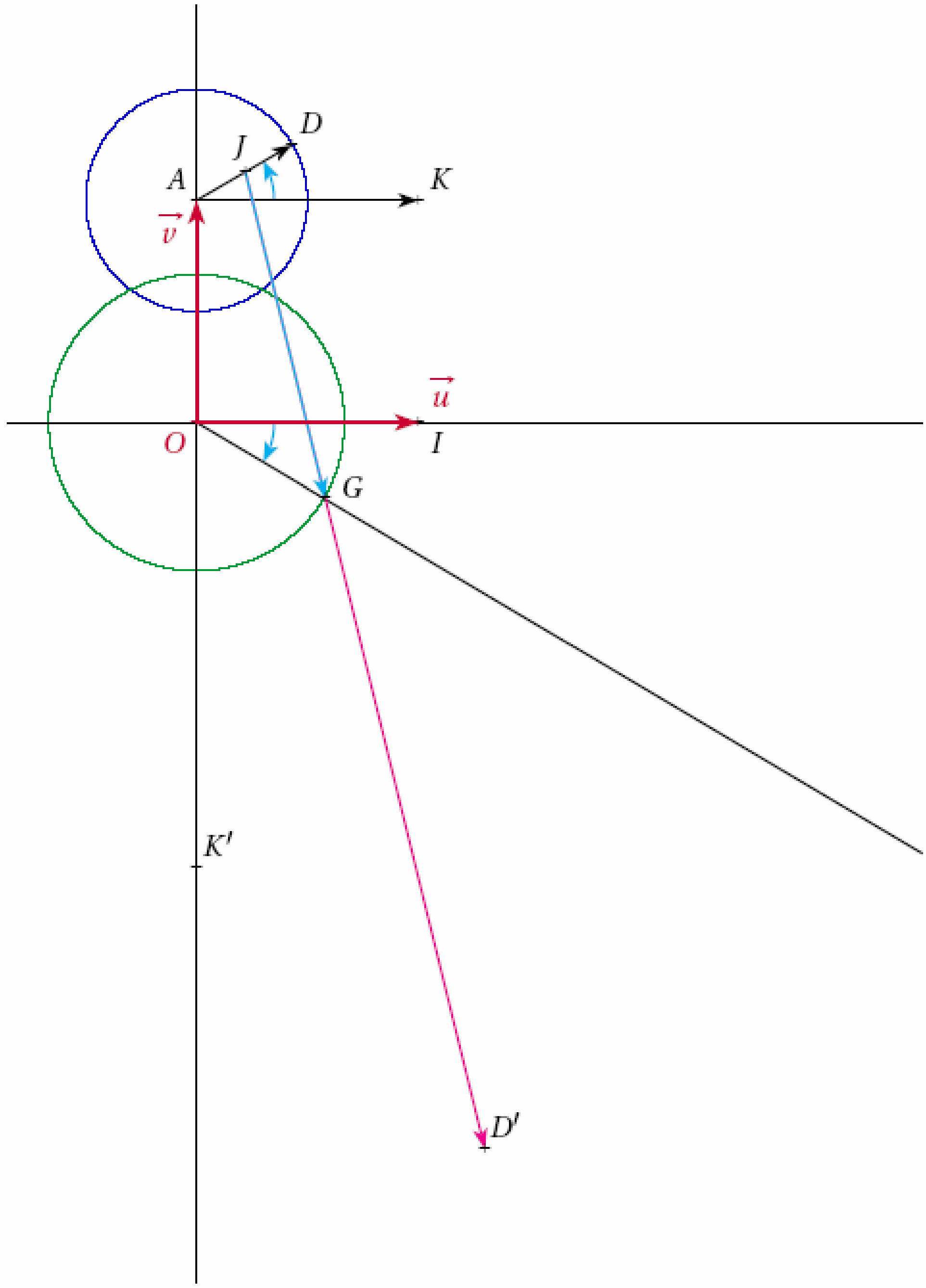
b. Soit M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors $AM=r$, donc $|z-i|=r$. D'après la relation précédente, cela implique que $|g|=\frac{1}{3r}$, donc que G appartient au cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.

c. D'après la relation de la question 3a :

$$\arg g=\arg\left(\frac{1}{3(z-i)}\right)=-\arg(3(z-i))=-\arg 3-\arg(z-i)=-\arg(z-i)=-\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM}\right).$$

d. Construction du point D' :

- on construit le point G, point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\dfrac{2}{3}$ et de la demi-droite d'origine O faisant un angle de $-(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{AD})$ avec l'horizontale ;
- G est le centre de gravité du triangle ADD', en notant J le milieu de $[AD]$ on a donc : $\overrightarrow{JD'} = 3\overrightarrow{JG}$.



EXERCICE 3 :

1. Question de cours.

2. a. D'après le résultat précédent si $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la rotation R on a alors : $z' - (2+2\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}[z - (2+2\mathrm{i})] \iff$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)[z - (2+2\mathrm{i})] + 2 + 2\mathrm{i} \iff$$

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - (1+\mathrm{i}\sqrt{3})(1+\mathrm{i}) + 2 + 2\mathrm{i} \iff$$

$$\boldsymbol{z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 + \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(1 - \sqrt{3}\right)}$$ qui est l'écriture complexe de R.

b. En appliquant cette relation à l'affixe de I, on obtient :
$z_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

c. On a $\mathrm{IB}^2 = |1+\mathrm{i}|^2 = 2$; de même $\mathrm{IO}^2 = |1+\mathrm{i}|^2 = 2$.
d'après la définition de la rotation R, le triangle BIA est isocèle d'angle au sommet de mesure $\frac{\pi}{3}$: c'est donc un triangle équilatéral.
Donc $\mathrm{IB} = \mathrm{AB} = \mathrm{IA} = \mathrm{IO} = \sqrt{2}$.
En particulier les points les points O, A et B sont équidistants de I. Ils sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{2}$.
On a $1 + \mathrm{i} = \dfrac{0 + (2+2\mathrm{i})}{2}$, c'est-à-dire que I est le milieu du diamètre [OB].
Le triangle OAB est donc inscrit dans le cercle précédent : il est donc rectangle en A.
Par complément à π, on trouve que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

d. On a $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \arg(z_{\mathrm{I}}) = \frac{\pi}{4}$.
En appliquant la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$.

3. a. $\mathrm{A}' = T(\mathrm{A})$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IO}}$ est $-1-\mathrm{i}$. On a donc
$z_{\mathrm{A}'} = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(3-\sqrt{3}\right) - 1 - \mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

b. On a par définition de la translation $\overrightarrow{\mathrm{IO}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}'} \iff$ (OIAA′ est un parallélogramme ; de plus d'après 2 c AI = IO ; La quadrilatère OIAA′ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutis de même longueur : c'est donc un losange (mais pas un carré car $\left(\overrightarrow{\mathrm{IO}}, \overrightarrow{\mathrm{IA}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.)

c. On sait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}'}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OI}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$; en appliquant la relation de Chasles on obtient $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}'}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}'}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{12}$.