Donc lorsque A décrit (OA_0), Ω décrit l'image de la droite (OA_0) par s'' à savoir Δ'.

Remarque : si $A = A_0$, $\Omega = O$ et $s''(A_0) = O$.

64 1. $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
$(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
donc EAB et ABC sont indirectement semblables ; de même pour DCA et ABC.

- $s_1 : ABC \to EAB$ par une similitude indirecte de rapport $\frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}$.
- $s_2 : ABC \to DCA$ par une similitude indirecte de rapport $\frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$.

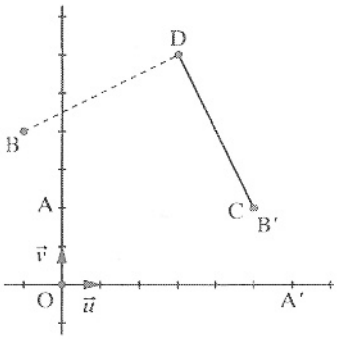
2. $DCA \xrightarrow{s_2^{-1}} ABC \xrightarrow{s_1} EAB$. La composition de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
DCA et EAB sont directement semblables de rapport $\frac{b}{c}$.

65 1. et 2.

- $(t \circ S)(A) = t(A) = A'$.

Soit $z_{A'} - z_A = z_C - z_B \Leftrightarrow z_{A'} = (6 - 2i) + 2i = 6$.

- $(t \circ S)(B) = t(B) = C$ donc $B' = C$.



3. $t \circ S$ est une similitude, comme t conserve les angles orientés et S change un angle orienté en son opposé, $t \circ S$ est une similitude indirecte.

Pour $A \xmapsto{f} A'$ et $B \xmapsto{f} B'$ on a :

$$\frac{-3-4i}{5}(-2i) + \frac{38-6i}{5} = \frac{-8+6i}{5} + \frac{38-6i}{5} = 6.$$

$$\frac{-3-4i}{5}(-1-4i) + \frac{38-6i}{5} = \frac{25+10i}{5} = 5 + 2i.$$

Comme l'écriture complexe d'une similitude indirecte est déterminée de manière unique par les images de deux points distincts, nous en déduisons que $f = t \circ s$ a pour écriture complexe $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$.

4. Soit M d'affixe $z = x + yi$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, M est invariant par f si et seulement si :

$$x + yi = \frac{-3-4i}{5}(x - yi) + \frac{38-6i}{5}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} 4x + 2y = 19 \\ 4x + 2y = -6 \end{cases}$

Ce système a pour ensemble solution l'ensemble vide.
Il n'existe donc pas de point M invariant par f.
f n'est donc pas une symétrie axiale.

5. a. Une écriture complexe de S′ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$S'(B) = D \Leftrightarrow 3 + 6i = a(-1 - 4i) + b$ (1).

I d'affixe $\frac{z_B + z_D}{2} = 1 + 5i$ est le milieu de [BD] donc appartient à Δ. Il en résulte $S'(I) = I$.

$S'(I) = I \Leftrightarrow 1 + 5i = a(1 - 5i) + b$ (2).

(1) et (2) équivalent à $\begin{cases} a(-2+i) = 2 + i \\ a(1-5i) + b = 1 + 5i \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = \frac{-3-4i}{5} \\ b = (1+5i) + \left(\frac{3+4i}{5}\right)(1-5i) \end{cases}$

Soit $a = \frac{-3-4i}{5}$ et $b = \frac{28+14i}{5}$.

S′ a donc pour écriture complexe :

$$z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{28+14i}{5}.$$

b. Une écriture complexe de $f \circ s'$ est :

$$z' = \frac{-3-4i}{5}\left(\frac{-3+4i}{5}z + \frac{28-14i}{5}\right) + \frac{38-6i}{5},$$

$$z' = z - \frac{28+14i}{5} + \frac{38-6i}{5},$$

$$z' = z + 2 - 4i.$$

$f \circ s'$ est donc la translation de vecteur d'affixe $2 - 4i$.
Comme $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $2 - 4i$, $f \circ s'$ est la translation t' de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

c. $f \circ s' = t'$ soit $(f \circ s') \circ s' = t' \circ s'$, c'est-à-dire $f \circ (s' \circ s') = t' \circ s'$, comme $s' \circ s' = \mathrm{Id}$, $f = t' \circ s'$.
On peut remarquer que $\overrightarrow{DC}$ est un vecteur directeur de Δ car $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{BD}$ et vérifier par construction que $(t' \circ s')(B) = C$.

66 1. $x' + y'i = \frac{3+4i}{5}(x - yi) + \frac{1-2i}{5}$

$$= \frac{(3x + 4y + 1) + (4x - 3y - 2)i}{5}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$