CORRECTION DS N° 8

Exercice 1:

1. **a.** Signe de $\ln x(1-\ln x)$: on fait un tableau de signes :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(1-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

b. On a $f(x)-g(x)=\ln x-(\ln x)^2=\ln x(1-\ln x)$. On déduit du tableau précédent que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{C}'$ sauf entre 1 et e.

2. $M(x\,;\,\ln x)$ et $N\left(x\,;\,(\ln x)^2\right)$.

a. On a déjà vu que $h(x)=\ln x(1-\ln x)$.
Cette fonction est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}\ln x=\dfrac{1}{x}(1-2\ln x)$
qui est du signe de $1-2\ln x$. Cette différence s'annule pour $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.
Sur $]0\,;\,\sqrt{\mathrm{e}}[$, $h'(x)>0$, donc h est croissante ;
Sur $]\sqrt{\mathrm{e}}\,;\,+\infty[$, $h'(x)<0$, donc h est décroissante ;
Donc la fonction h a un extremum (la dérivée s'annule en changeant de signe), qui est un maximum pour $x=\sqrt{\mathrm{e}}$.
Comme ce nombre est entre 1 et e, le nombre $h(x)$ est positif et est égal à la distance MN.

b. L'équation $(\ln x)^2-\ln x=1$ est équivalente à $-h(x)=1 \iff h(x)=-1$.
On pose $X=\ln x$ et on résout l'équation $X^2-X-1=0 \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-1 \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4} \iff \left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
On a donc deux solutions $X_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\ln x_1$ et $X_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\ln x_2$.
On a donc finalement deux solutions :
$x_1=\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $x_2=\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

c. Sur $]0\,;\,1[\cup]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ la fonction $(\ln x)^2-\ln x$ est positive et représente donc la distance MN.
D'après la question précédente il existe deux valeurs de x pour lesquelles la distance $MN=1$. Ce sont les réels $a=\mathrm{e}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ et $b=\mathrm{e}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

3. **a.** Grâce à une intégration par parties (avec $u'=\mathrm{d}x$ et $v=\ln x$, d'où $u=1$ et $v'=\dfrac{1}{x}$, les fonctions u' et v' étant continues sur $]0\,;\,+\infty[$:

$$\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=[x\ln x]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x}{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-0-[x]_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-\mathrm{e}-(-1)=1.$$

b. Avec $G(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$ qui est dérivavable, on a $G'(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + x\left(\dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2}{x}\right) = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2 + 2\ln x - 2 = (\ln x)^2$.

c. Sur l'intervalle $[1\ ;\ e]$ on a vu que $\ln(x) - (\ln x)^2 \geqslant 0$, donc l'aire $\mathscr{A}$ est égale à $\displaystyle\int_1^e \left[\ln x - (\ln x)^2\right] dx = \int_1^e \ln x\, dx - \int_1^e g(x)\, dx = 1 - [G(x)]_1^e = 1 - G(e) + G(1) = 1 - e(1 - 2 + 2) + 2 = 3 - e$. (u. a.)

Exercice 2:

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0\,;\,1]$ est intégrable sur cet intervalle et $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\, dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2e} - 0 = \frac{1}{2e}$.

2. On sait que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus du segment [OA] ; l'intégrale de f sur $[0;\ 1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec I(1 ; 0)). Cette aire est égale à $\dfrac{OI \times IA}{2} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2e}}{2} = \dfrac{1}{4e}$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx \geqslant \frac{1}{4e}$.

Partie B

1. L´étude de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ montre :

-g croissante sur $[0\ ;\ 1]$ avec $g(0) = 0$ et décroissante sur $[1;\ +\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

(quotient des termes + haut degré)

-elle atteint son max $\dfrac{1}{2}$ en 1.

On en déduit donc les inégalités demandées.

2. On a pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \le \dfrac{x}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2}$

donc pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $0 \le \dfrac{xe^{-x}}{x^2+1} \le \dfrac{1}{2}e^{-x}$ car $e^x > 0$ pour tout x réel.

Par passage à l'intégration : $0 \le \displaystyle\int_n^{2n} \frac{xe^{-x}}{x^2+1}dx \le \int_n^{2n} \frac{1}{2}e^{-x}dx$ pour tout entier naturel n,

i.e $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2}[-e^{-x}]_n^{2n}$ i.e pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

3.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-2n} = 0$, on en déduit par application du théorème des « gendarmes » :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 3 :

1. $F'(x) = 2\sin x \cos x$ donc FAUX.

2. $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt = [tf(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)dt$ par intégration par parties donc VRAI

3. Faux Contre-exemple : Si $f(t) = 1$ et $g(t) = 2x$ alors $\int_0^3 f(t)dt = 3$ et $\int_0^3 g(t)dt = [x^2]_0^3 = 9$

4. $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ est par définition la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue sur [0 ;1[$t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$, donc elle est dérivable. Donc VRAI.